

De rekenkunde bij EMVI

Fedde Tolman
KOAC-NPC

Samenvatting

Omdat er vele modellen voor het berekenen van de scores in EMVI-modellen in omloop zijn, heeft Pianoo¹ een werkbijeenkomst georganiseerd om hierin meer duidelijkheid te krijgen. In dit artikel worden enige achtergronden van EMVI, die overigens bekend zijn in o.a. de micro-economie en de keuze- en besliskunde, beschreven. Vervolgens worden enige vigerende varianten op grond van deze principes vergeleken.

Het standpunt dat in dit artikel betoogd wordt, is dat eenvoudige modellen de voorkeur verdienen, omdat complexere modellen vaak onvoldoende steekhoudend onderbouwd kunnen worden en data in de regel niet economisch verkregen kan worden. Omdat de meeste achtergrond van EMVI al lang bekend is, kan veel huidige discussie worden verminderd door daar eerst kennis van te nemen.

¹ DACE = Dutch Association of Cost Engineers

Pianoo Expertisecentrum Aanbesteden = Professioneel en Innovatief Aanbesteden, Netwerk voor OverheidsOpdrachtgevers

1 Inleiding

EMVI, economisch voordeligste inschrijving, of naar het Engelstalige EMAT (Economically Most Advantageous Tender) in iets onbeholpener Nederlands Economisch Meest Voordelige Inschrijving, is het bepalen van de voorkeur voor één van meerdere aanbiedingen op micro-economische grondslagen. Op 28 januari 2015 heeft PIANOo een werkbijeenkomst georganiseerd met het doel de wiskundige basis van vigerende EMVI beoordelingsmodellen te bespreken. Na een inleiding om de begrippen en het kader te stellen is een aantal scorefuncties voor het voetlicht gebracht. Tenslotte heeft de auteur van dit stuk getracht de aandacht op enige beginselen te vestigen. De eigenlijke aankoop en de vastlegging in een contract (procurement – verkrijging, verschaffing) waren geen onderdeel van de bijeenkomst. In dit artikel wordt ingegaan op enige begrippen uit de micro-economie, enige van de ten tonele gevoerde formules als voorbeeld en enige opmerkingen bij het begrip ‘rank reversal’.

2 Micro-economie

2.1 Ruil

De gebruikelijke terminologie in de economie is niet altijd eenduidig. Onderstaand zijn keuzen gemaakt en alternatieve termen soms aangegeven, zonder daarin volledigheid na te streven.

In de kern van de zaak gaat micro-economie over ruil. Er zijn twee hoofdvormen: keuze en prijsbepaling. In de eenvoudigste vorm betreft keuze één partij en meerdere goederen. Bij prijsbepaling zijn meerdere partijen en één goed betrokken. Het samengestelde geval van meerdere partijen en meerdere goederen valt buiten het bestek van dit artikel.

Tabel 1: overzicht theorieën

| ruil | 1 partij | meerdere partijen |
|-------------------|-------------------|------------------------------|
| 1 goed | | onderhandelen, prijs bepalen |
| meerdere goederen | kiezen, beslissen | stemmen, spel (wedstrijd) |

In dit artikel gebruikte termen en symbolen zijn

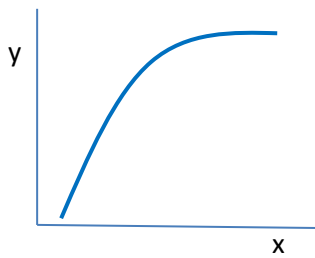
- X goed (in de brede betekenis van een ding (object, product), dienst of werk (proces) en kennis)
- x de grootte in kwaliteit² of hoeveelheid
- y de waarde (nut, utiliteit) van X
- y' de waarde per eenheid x: $y' = dy/dx$

Het begrip waarde wordt in verschillende betekenissen gebruikt. De drie meest gebruikelijke zijn getalsgrootte, subjectieve waarde en nut. De eerste betekenis is een getal zonder dimensie of eenheid. De subjectieve betekenis is iets dat waardevol of kostbaar (precious) gevonden wordt: de waarde die iemand eraan toekent. De derde betekenis is waarde voor een toepassing (nut). Het is vooral de laatste vorm die hier bedoeld wordt, hoewel de onderscheiding van de tweede niet altijd zo scherp is. In de betekenis van nut zijn er vaak wel technieken voorhanden om de waarde getalsmatig te bepalen.

Bij het toekennen van waarde blijkt empirisch vrijwel altijd de waarde per eenheid extra hoeveelheid of kwaliteit lager te worden (afnemend grensnut) en soms zelfs een verzadiging,

² Kwaliteit betekent oorspronkelijk soort, later eigenschap; en een bijvoeglijk naamwoord als ‘slecht’ of ‘goed’ is dus nodig; de suggestie dat kwaliteit altijd goed is, is misplaatst

op te treden. Dit wordt toegeschreven aan het gedrag van mensen en is al door Gossen³ opgetekend. Ook treedt het verschijnsel op, dat soms een minimale hoeveelheid nodig is om een waarde te verkrijgen.



Figuur 1: empirische nutsfunctie

Waarde wordt vaak uitgedrukt als geld. Geld is een bijzonder goed met drie betekenissen, namelijk als vervangend ruilmiddel, rekeneenheid en goed. De eerste betekenis is ook historisch de eerste: geld dient om onnodig gesleep met en opslag van goederen te verminderen. De tweede betekenis is het directe gevolg van de eerste. De derde betekenis wordt duidelijker doordat een opdrachtgever (OG, klant of eigenaar) en een opdrachtnemer (ON, leverancier) een ruil uitvoeren. OG geeft geld aan ON en ON een goed aan OG. Bovendien wordt de waarde van een goed (mede) bepaald door zijn opbrengst, i.c. de rente.

2.2 Prijs

Een koop vindt plaats tussen twee partijen op basis van een prijs. De reden om een koop te plegen is dat de waarde en de kosten van een product, dienst of kennis voor beide partijen verschillen. De volgende termen zijn van belang:

- k kost = (minimaal) noodzakelijke verwervingsuitgave
- y waarde (nut) = (maximaal) mogelijke opbrengstinkomst
- p prijs = overeengekomen kost-waarde combinatie

Winst is het verschil tussen prijs en kost resp. waarde en kost. In een evenwichtige situatie is $\text{kost} + \text{winst ON} = \text{prijs} = \text{waarde} - \text{winst OG}$.

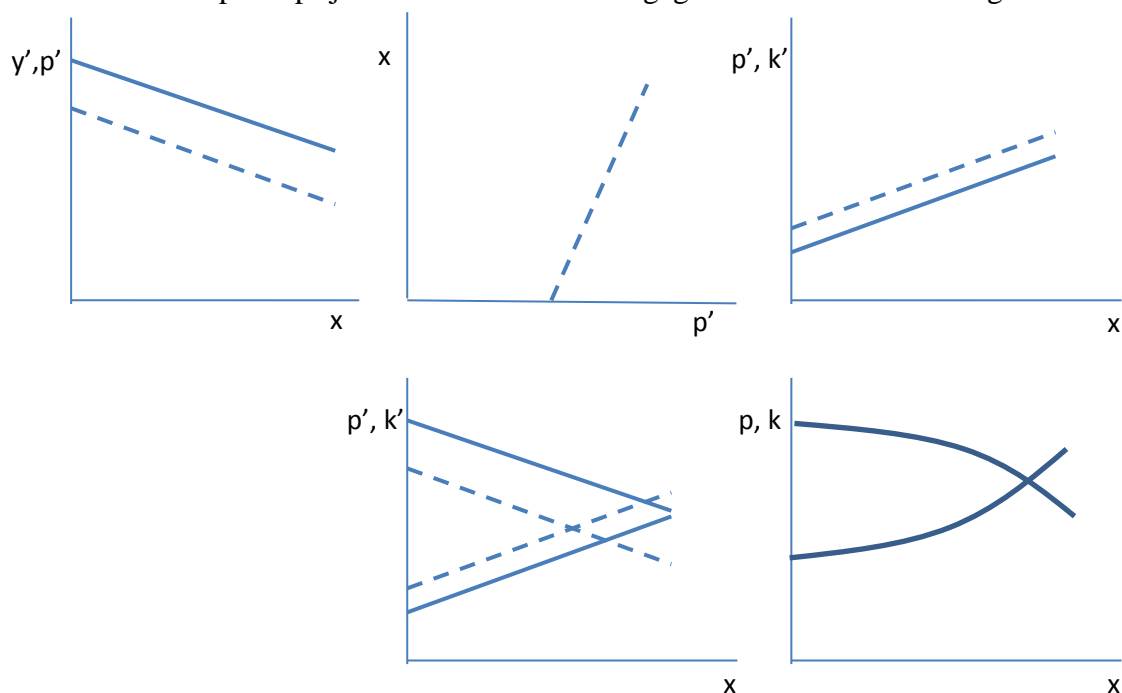
Kost, waarde en prijs hebben dus dezelfde eenheid. Gebruikelijk is die van geld, bijv. € of \$.

Bij sommige teksten kan ook onduidelijkheid ontstaan omdat deze begrippen zowel per eenheid als voor het totaal worden gebruikt. Het verdient aanbeveling in het eerste geval deze toevoeging te doen. In het bijzonder speelt deze verwarring op het gebied van de zogenaamde Value Engineering, waar het begrip ‘value = cost / performance’ basaal is. Omdat het hier gaat om kosten per eenheid van gedrag of functionaliteit zou het duidelijker zijn een aanduiding als unit-value of value-rate te gebruiken, afhankelijk van de interpretatie die beoogd wordt. In de notatie die hier gebruikt wordt is dat y' ipv y .

Een andere begripsverwarring kan ontstaan doordat waarde een relatief begrip is. Voor de koper is het i.h.a. het nut en voor de verkoper in eerste instantie zijn kosten. In de loop van de verkoop verschuift de betekenis naar de prijs, oftewel het nut van de verkoper.

³ Hermann Heinrich Gossen (1810 – 1858) was een econoom en werkte tot 1847 als ambtenaar in Pruisische dienst. In 1854 introduceerde hij het concept van verminderend marginaal nut, beter bekend als de eerste wet van Gossen. De tweede wet van Gossen stelt dat de uitwisselingsverhouding van goederen gelijk is aan de verhouding van marginale nut van de handelaren. Zijn derde wet was dat een goed waarde heeft slechts wanneer de vraag naar het goed het aanbod overschrijdt (dat wil zeggen dat de subjectieve schaarste de bron van waarde is). Zijn tweede wet was zijn origineelste bijdrage. [wikipedia.nl]

De manier waarop een prijs tot stand komt is weergegeven in onderstaande figuur.



Figuur 2: prijsvorming

I.h.a. nemen zowel de eenheidsprijs (gestreept) als de eenheidswaarde van de koper af met de hoeveelheid of kwaliteit. Als de eenheidsprijs stijgt, is de verkoper bereid meer te leveren. Door verwisseling van de assen en het toevoegen van de winst van de verkoper, ontstaat de verkoopenheidsprijs. Het evenwicht wordt gevonden in het snijpunt van de prijslijnen. Bij een verkoop waarbij geen verlies wordt geleden door één van beide partijen, kan de eenheidsprijs dalen tot het snijpunt van de gestreepte lijnen. De totale prijs wordt vervolgens bepaald.

2.3 Keuze

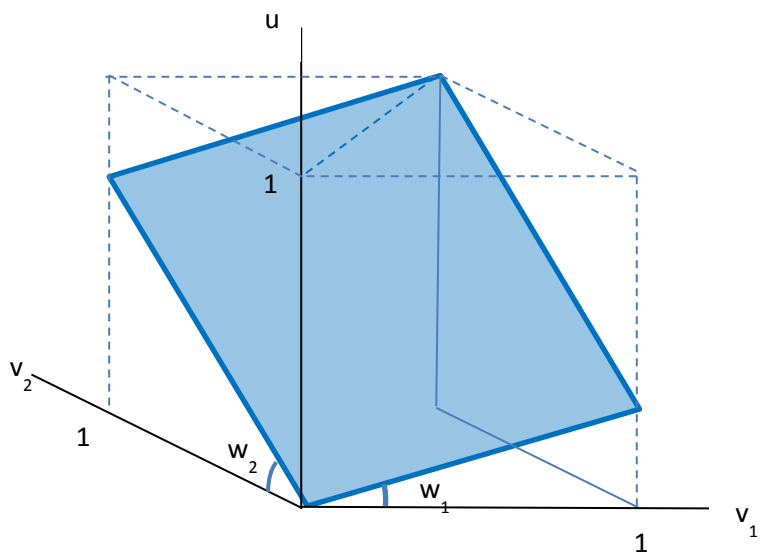
Er zijn in hoofdzaak drie manieren om tot een, niet noodzakelijk unieke, voorkeur te komen. Kiezen is het bepalen van een optie met de hoogste waarde na toekennen van waarden aan alle opties. Beslissen is het successievelijk verwijderen van opties tot één overblijft. Bij Pareto selectie worden enkel die opties verworpen die op alle fronten minder scoren dan tenminste één andere. Vervolgens moeten andere methoden tot een uniek resultaat leiden. Van alle drie methoden zijn vele operationele varianten ontwikkeld.

Tabel 2: overzicht optimalisatiemethoden

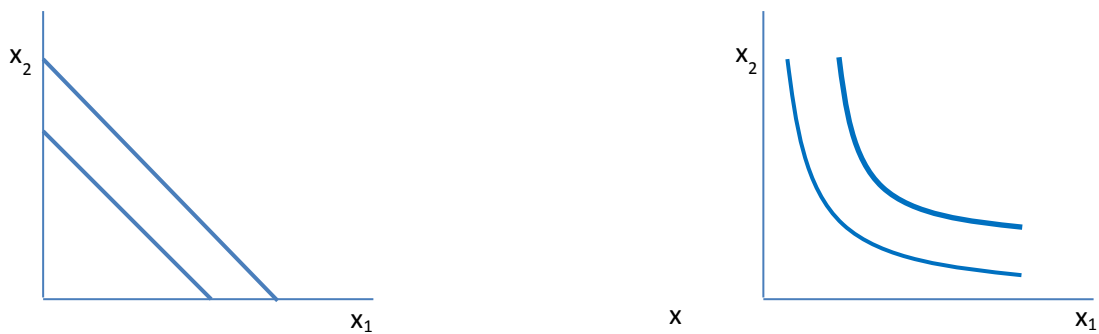
| methode | voorbeelden |
|------------|--|
| keuze | MCA (multi criteria analyse), AHP (analytical hierarchy proces), SMART |
| beslissing | lexicografische methode, ELECTRE, |
| selectie | Pareto |

Het doel van een keuze is te gaan van kardinale waarden naar ordinale⁴. Een gebruikelijke indeling van getallen is NOIR (nominaal, ordinaal, interval, ratio). De kardinale getallen zijn van het type I en R. De ordinale uiteraard van het type O. De verschillen in kardinale scores leiden tot ordening, maar de grootte van deze verschillen is vervolgens niet meer van belang. Een optie wordt hoger geordend dan een andere als zijn score hoger is, ongeacht de grootte van dit verschil. Dat kan tot verrassende problemen leiden, zie par. 5.

In figuur 4 is het beslissingsprobleem schematisch weergegeven. Voor twee opties (x is aangegeven als v en y als u), zijn waarden y bepaald. Door deze waarden is een continu vlak geconstrueerd (blauw). De projectie van lijnen van gelijke waarde y zijn in figuur 6 weergegeven. Opties op de lijn met hoogste y -waarde verdienen de voorkeur.



Figuur 3: MCA voor twee variabelen ($x = v$, $y = u$)



Figuur 4: projectie van lijnen van gelijke y voor combinaties van x (links lineair, rechts i.g.v. wet van Gossen)

2.4 Getal

Omdat er zowel hoeveelheden als een kwantitatieve grootheid ‘nut’ wordt beschouwd, zijn getallen dus onontbeerlijk. De inkoper zal ze moeten bepalen. Als er een vergelijkingsmaat beschikbaar is, kan men meten of schatten:

⁴ Bij beslissingen en selecties volgens de methoden in tabel 3 kan het vertrekpunt ook ordinale waarden zijn. Omdat dit bij EMVI niet gebruikelijk – en wellicht niet in overeenstemming met het ARW is – wordt daar niet verder op ingegaan

- onder meten wordt begrepen dat er een norm is; in de regel kan er dan een verschil worden bepaald
- als er geen genormeerde referentie is, spreekt men in de regel van schatten, wat gebeurd door verhoudingen te bepalen

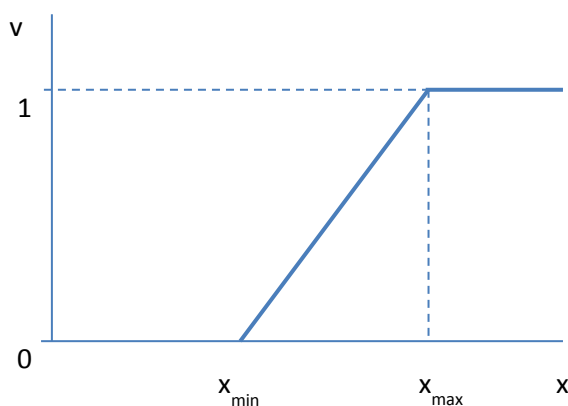
Als alternatieven slechts onderling kunnen worden vergeleken, zijn er vele methoden en technieken ontwikkeld zoals direct rating = rechtstreekse toedeling (interval), ranking (reverse, reciprocal, ...), (repeated) bisection, trade off = ruil, SWING. Voor de verklaring wordt naar de literatuur verwezen.

Het principe van vergelijking is in de regel stelselmatige paarsgewijze vergelijking (Pairwise Comparison, PC), bekend onder namen als Analytic Hierarchy Process (AHP) en Analytic Network Process (ANP), beide vooral door Saaty en diverse medewerkers gepopulariseerd. Naast intuïtieve begrijpbaarheid en accepteerbaarheid overtuigt vooral de mogelijkheid tot een berekenbare maat voor consistentie. Het principe is het vergelijken van een matrix van wegingsfactoren $\left[\frac{w_i}{w_j}\right]$ met een PC-matrix $[a_{ij}]$. De consistentie maat is de afwijking van de maximale eigenwaarde van de rang van de matrix. De rede schiet hier een mankerende empirie te hulp. Voor de bepaling van de wegingsfactoren zijn vele schalen voorgesteld (Saaty, Lootsma, Salo en Hamalainen, ...).

3 Lineaire normale waardefunctie

Er zijn veel al nutsfuncties voorgesteld. In de praktijk is het al echter zo moeizaam de parameters van de meest eenvoudige, de geschetste tweezijdig begrensd lineaire, te bepalen, dat de subtiliteiten van de complexere in de regel gevoeglijk naar het rariteitenkabinet kunnen worden verwezen. Deze uitspraak is verder gemotiveerd doordat vaak ook beschrijving van de achterliggende gedachte ontbreekt of weinig hout snijdt. In deze paragraaf wordt daarom ingegaan op de lineaire normale functie van twee variabelen en de manier waarop complexe functies daartoe teruggebracht kunnen worden.

Bij de lineaire nutsfunctie van een variabele zijn er 4 parameters, de x- en y-waarden van de begin en eindpunten of eventueel de vervanging van 1 van deze 4 door de helling van de lijn. Als er door empirische data een complexere functie bekend zou zijn, is het vanwege de wiskundige manipulaties altijd mogelijk zo'n functie te lineariseren: $y = \sum_i a_i x_i$. Daarbij is het bovendien handig haar te normaliseren, d.w.z. de waarden op $[0, 1]$ terug te voeren. Ook maken positieve variabelen de wiskunde makkelijker: als een van beide negatief is bijv. p-q dan $\frac{\partial u}{\partial p} < 0$, $\frac{\partial u}{\partial q} > 0$. In geval van een breuk is de Taylor reeks $\frac{1}{x} = \frac{x_0^{-1}}{0!} - \frac{x_0^{-2}}{1!}(x - x_0) + \dots = a_0 + a_1 x + \dots$.



Figuur 5: gelineariseerde en genormaliseerde nutsfunctie v

$$u_i = \max \left(\sum_j v_{ij} w_j \right) \quad (1)$$

$$v_{ij} = \frac{x_{ij} - x_{ij, \min}}{x_{ij, \max} - x_{ij, \min}} \quad (2)$$

$$\sum_j w_j = 1, \quad w_j > 0 \quad (3)$$

met:

i optie,

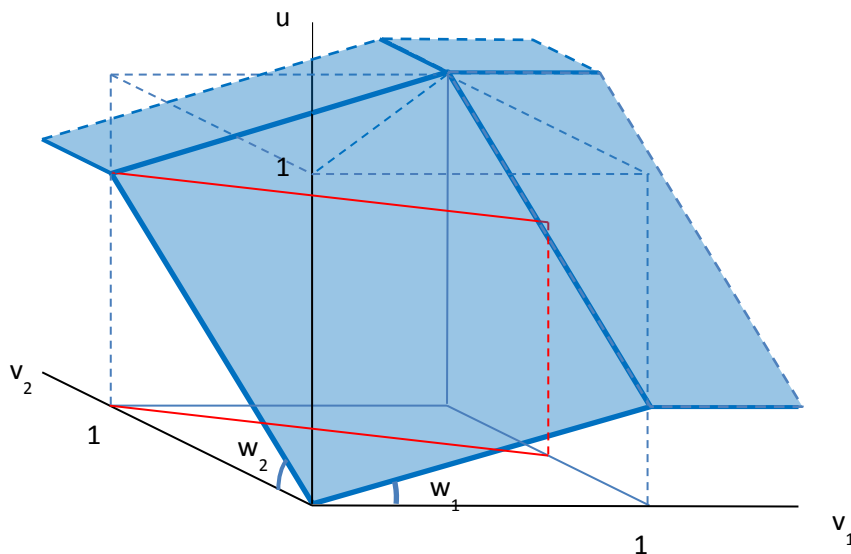
j aspect

$v(x_{ij})$ genormaliseerde marginale nutsfunctie

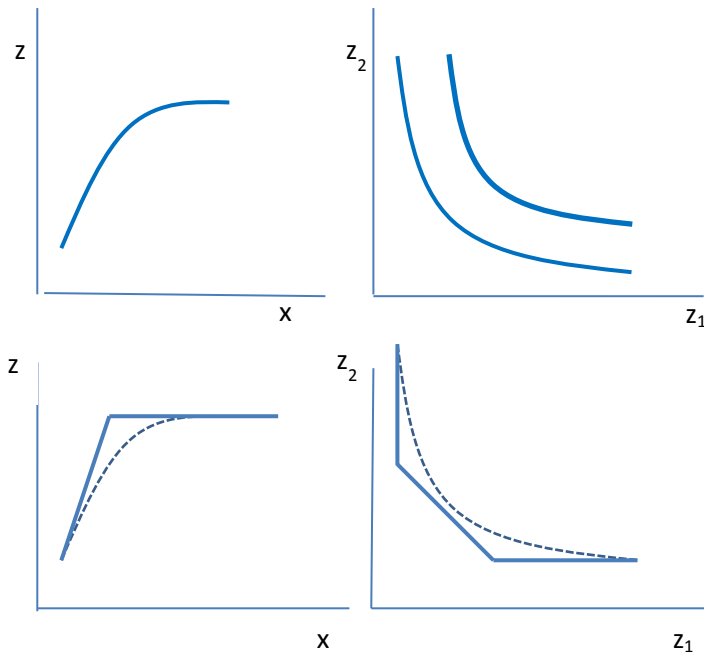
$z(x_{ij})$ simultane nutsfunctie

$u(v_{ij})$ genormaliseerde simultane nutsfunctie

Een voorwaarde is dat x_{ij} onafhankelijk zijn. De gelineariseerde genormaliseerde nutsfunctie voor 2 variabelen is in onderstaande figuur weergegeven.



Figuur 6: gelineariseerde genormaliseerde nutsfunctie



Figuur 7: projectie op een vlak van constant nut

Vaak wordt een afweging gemaakt in termen van kwaliteit q , als een of andere aggregaat van kwaliteitsaspecten en prijs p , zodat x_1 en x_2 in termen van p en q worden uitgedrukt als

$$v_1 = \frac{q_{ij} - q_{ij, \min}}{q_{ij, \max} - q_{ij, \min}} \quad (4)$$

$$v_2 = \frac{p_{i, \min} - p_i}{p_{i, \max} - p_{i, \min}} \quad (5)$$

$$u = w_1 v_1 + w_2 v_2 \quad (6)$$

4 Enkele EMVI modellen

Er zijn vele vergelijkingen in omloop die gebruikt worden als model voor EMVI beslissingen [ref. 7 – 12]. (7) – (10) zijn vier voorbeelden van vergelijkingen met twee onafhankelijke variabelen, p en q , en een variërend aantal parameters. De voornaamste verschillen tussen de vergelijkingen zijn het aantal parameters, oftewel de hoeveelheid benodigde kennis van het beslissingsprobleem, en de moeilijkheid daarvan de waarden te bepalen. In alle modellen zijn impliciete aannamen voor het domein van de variabelen gedaan. Vaak worden deze aannamen bij de toepassing vergeten.

Ter vergelijking is (11) het normale lineaire model voor deze twee variabelen bijgevoegd.

$$p_e = -p + Cq \quad (7)$$

$$U' = \frac{q}{p} \quad (8)$$

$$U(\max) = C_p \left(1 - \frac{1}{\lg(c)} \lg \left(\frac{p}{p_{\min}} \right) \right) + C_q q \quad (9)$$

$$U(\min) = \left(0,5 \left(\left(\frac{p}{p_r} \right)^n + \left(2 - \frac{q}{q_r} \right)^n \right) \right)^{1/n} \quad (10)$$

$$u = w_p v_p + w_q v_q \quad (11)$$

| | |
|------------------|---|
| p | aangeboden prijs |
| p _e | equivalente prijs |
| p _{min} | laagste aangeboden prijs |
| q | kwaliteit |
| U' | nut (waarde, score) per eenheid (bijv. hoeveelheid of mate van goede kwaliteit) |
| U | nut waarvan ofwel de maximale ofwel de minimale grootte als beste wordt beschouwd |
| C | coëfficiënt (wegingsfactor) |
| c | c = p _{max} / p _{min} |
| r | (index) referentie |
| n | (exponent) te kiezen waarde, bijv. 3 tot 5 |
| v | genormaliseerde waarde |
| w | genormaliseerde wegingsfactor |
| u | genormaliseerd nut |

(7) staat o.a. bekend als de CROW methode 'Gunnep op waarde', een zogenaamde Weighted Factor Score (WFS). Problemen zijn de bepaling van C en het aangeven van grenzen voor p en q. Vaak wordt veel aandacht besteed aan de ondergrens voor q, meestal in een vraagspecificatie, terwijl ook een bovengrens voor p en in mindere mate voor q wenselijk zijn. Verder zal ook inzicht in een ondergrens voor p nuttig zijn bij de beoordeling. Te lage prijzen betekent praktisch het verschuiven van problemen naar latere projectfasen. Dit model staat al zeer lang te boek onder namen als Multi Criteria Analyse (MCA), Cost Benefit Analysis (BCA) etc.

(8) is de zgn. Value for Money (VFM). Dit komt overeen met de definitie van Value Engineering: value = functionality / cost, die overigens al in ca. 1944 door L.D. Miles is voorgesteld. Hier hoeft geen parameter te worden bepaald, maar is het vastleggen van grenzen voor p en q kritischer. Overdreven p en q stuiten op problemen die niet in dit model zijn begrepen, bijv. een budget. Een fundamenteel probleem is dat alle lijnen van gelijke waarde door de oorsprong gaan. Hiervoor is geen reden. Verder kan de eenheid tot verwarring leiden (zie inleiding).

(9) is voorgesteld om het probleem van de zgn. rangverwisseling (rank reversal, par.5) te vermijden. Er moeten 4 parameters worden gekozen. De betekenis van de lg-transformatie is dat $lg(p/p_r) = lg(p) - lg(p_r)$, waarmee een prijsverschil onafhankelijk van de keuze van een referentieprijs wordt.

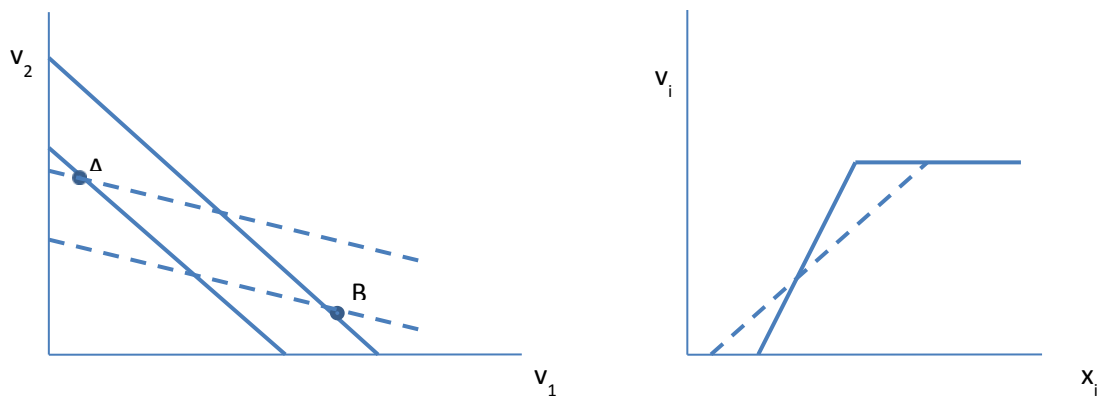
(10) wordt door de Belastingdienst voorgesteld. De afleiding van de vorm en de motivering voor de factoren is onduidelijk. (10) is in principe al bekend sinds 1961 bekend als de CES (Constant Elasticity of Substitution) productiefunctie $Q = (cK^n + (1 - c)L^n)^{1/n}$ met bijv. Q productie, K kapitaal en L arbeid. De elasticiteiten, de relatieve afgeleiden, behouden de functievorm

$$\frac{dQ}{Q} = \left(cK^n \frac{dK}{K} + (1 - c)L^n \frac{dL}{L} \right)^{1/n}.$$

Volledigheidshalve is het lineaire normale model voor de twee variabelen p en q als (11) opgenomen.

5 Rangverwisseling, afhankelijkheid en gevoeligheid

De werking van een keuze is een toegekende waarde te vervangen door een rang. In de besliskunde en de regelgeving is veel aandacht besteed aan het fenomeen rangverwisseling⁵, d.w.z. dat de volgorde van de kandidaten bij een inschrijving beïnvloed wordt door verschijnselen die geen invloed zouden horen te hebben. Het bekendste voorbeeld is dat terugtrekking van de laagst geplaatste kandidaat de scores van de anderen kan beïnvloeden⁶. Dit fenomeen wordt in het lineaire normale model eenvoudig inzichtelijk via onderstaande figuur. In de rechter figuur verschuift door verandering van de ondergrens (bijv. terugtrekking van de laagst geplaatste aanbieder bij een zgn. ‘relatieve waardering’) de waardefunctie van de gestreepte naar de getrokken lijn. In het v_1 - v_2 vlak, met constante waardelijnen komt A van de hoger gewaardeerde gestreepte lijn op de lager gewaardeerde getrokken lijn en B vice versa. Door draaiing van het u -vlak in 2 richtingen verplaatsen de lijnen van gelijke waarde in het grondvlak (van getrokken naar gestreept). De opties behouden hun locatie. Daardoor kan hun rangorde veranderen.



Figuur 8: voorbeeld van rangverwisseling als de laagste grenswaarde wordt veranderd

Een ander probleem dat kan optreden betreft afhankelijkheid. Een voorbeeld van de oorzaak van afhankelijkheid is kwantumkorting (bijv. als een project minder staartkosten – uitgedrukt als een percentage van de overige posten - heeft dan de andere, kan scopevergroting zijn prijs in verhouding tot die anderen verbeteren).

Ten derde moet rekening worden gehouden met de gevoeligheid en de onderscheidendheid van het model. Met gevoeligheid of robuustheid wordt bedoeld dat veranderingen in de invoer niet te kleine of te grote gevolgen krijgen. Daarnaast moet een betekenisvol verschil in invoer in de uitvoer blijken en moet men oppassen geen betekenis aan niet betekenishebbende (te kleine) verschillen toe te kennen. In dat geval nemen twee opties dezelfde plaats in de rang in.

6 Conclusies

EMVI is in principe bekende klassieke micro-economie. De relevante kennis mag worden verwacht van personen die een beoordeling opstellen en uitvoeren.

⁵ Het begrip ‘rangordeparadox’ is hier misplaatst. Ten eerste volstaat in de term ofwel rang (van Germaanse oorsprong, vgl. ring) ofwel orde (uit het Latijn). Ten tweede is er geen paradox, maar een kennelijk wat verrassend gevolg van een berekening. Er bestaat wel een beslissingsparadox, namelijk dat om een beslissing te nemen eerst beslist moet worden welke beslissingsmethode gebruikt gaat worden. Een andere methode kan vervolgens een andere uitkomst van de beslissing geven.

⁶ Wikipedia geeft 5 typen, waarvan 1 en 2 eigenlijk gelijk zijn en betrekking hebben op het hier beschreven geval. 3 en 4 zijn wederom eigenlijk gelijk en betreffen de mate van detail van de hiërarchische vorm van het beschouwde beslissingsprobleem. 5 is m.i. evident: bij gebruik van een ander model kan de uitslag anders uitpakken (dit is dus wel paradoxaal).

Complexe EMVI scorefuncties worden afgeraden. De functies en de parameters kunnen in de praktijk onvoldoende worden onderbouwd en uitgelegd en voor de objectieve bepaling van hun getalswaarden is onvoldoende bekend. Een (stuksgewijs) lineaire nutsfunctie is praktisch al lastig genoeg.

De OG moet zowel waarderingen v als wegingsfactoren w bepalen en inzichtelijk onderbouwen. Dat is geen gemakkelijke taak met subjectieve elementen. In de praktijk wordt zij in de regel te arbitrair en met te geringe kennis van de inhoud van het in te kopen goed uitgevoerd. Dit komt bijvoorbeeld vaak naar voren als rapportcijfers worden gegeven.

Het doel van EMVI is opties te rangschikken (ranking). Dat wordt vaak gedaan door waarden van deze opties te bepalen (rating). (Ongeoorloofde) rangverwisseling kan ontstaan door onderlinge afhankelijkheid van v en w , samenstellen van relatieve scores en overgaan op een ander model (de zgn. beslissingsparadox).

Afhankelijkheid tussen attributen komt vaak voor en kan grote effecten hebben, maar wordt zelden onderkend. Dat is ook het geval met gevoeligheid, vooral door een grotere nauwkeurigheid toe te passen dan met het model en de gegevens gerechtvaardigd kan worden. Het gebruik van intervalwaarden, de opstap naar een probabilistische behandeling, i.p.v. discrete waarden is een middel om in beide verbetering te brengen.

Referenties

1. PIANOo; presentaties van de werkbijeenkomst; email 03-02-2015 11:13 Detrick-van Ligten, L.A. aan deelnemers
2. Tolman, F; Calculating Economically Most Advantageous Tenders; CostANDValue 2016
3. Klundert, Th. van de; Grondslagen van de economische analyse; 1968
4. Wikipedia (meerdere ingangen)
5. Tolman, F; Lineair normaal meerkeuzemodel voor EMVI; PIANOo werkbijeenkomst 2015
6. Saaty, Th.L.; Theory and Applications of the Analytic Network Process; RWS Publications 2005
7. Dreschler, M.; Fair Competition; (thesis) Delft University of Technology; 2009
8. Stan Stilger (Przemyslawm), Jan Siderius, Erik M. van Raaij; A Comparative Study of Formulas for Choosing the Economically Most Advantageous Tender; 2015
http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2626934
9. -; Gunnen op waarde: hoe doe je dat?; CROW publ.253; 2007
10. -; Handleiding EMVI 2014; RWS versie EV1.0 d.d. 10 maart 2014
11. Chen, T.H.; Hoe pas je EMVI toe?; PIANOo 2014
12. -; Belastingdienst; EMVI-Superformule; 2014